



Análisis del comportamiento de un potencial lineal al solucionar la ecuación de Schrödinger.

Analysis of the behavior of a linear potential when solving the Schrödinger equation.

Jairo Alonso Mendoza ^{ab} Juan Carlos López ^{ac} Rosalba Mendoza Suárez ^{ac}

^a Facultad de Ciencias Básicas, Universidad de Pamplona, Colombia. E-mail: jairoam@unipamplona.edu.co

^b Departamento de Física y Geología, Universidad de Pamplona, Colombia.

^c Departamento de Matemáticas, Universidad de Pamplona, Colombia.

Recibido: Octubre 13, 2020. Aceptado: Noviembre 18, 2020

<https://doi.org/10.24054/01204211.v2.n2.2020.4440>

Resumen:

En el presente artículo hallamos la solución de la ecuación de Schrödinger para un potencial lineal $V(x) = -kx$, con $k > 0$. La solución encontrada por medio del método de separación de variables da como resultado la superposición de funciones de Bessel de orden 1/3; lo interesante es la simplicidad con que es resuelto el problema académico, el cual puede ser relacionado con diferentes modelos de potenciales lineales como el gravitacional y el efecto Stark. Finalmente se gráfica el cuadrado del valor absoluto de la función de onda encontrada $|\Psi(x, t)|^2$.

Palabras clave: Función de Airy, Función de Bessel, Función de Schrödinger.

Abstract:

In this article we find the solution of the Schrödinger equation for a linear potential $V(x) = -kx$, with $k > 0$. The solution found by means of the variable separation method results in the superposition of Bessel functions of order 1/3; The interesting thing is the simplicity with which the academic problem is solved, which can be related to different models of linear potentials such as gravitational and the Stark effect. Finally the square of the absolute value of the wave function found $|\Psi(x, t)|^2$ is plotted.

Keywords: Airy function, Bessel function, Schrödinger function, .

1 Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la mecánica cuántica es resolver la ecuación de Schrödinger, se tienen diferentes tipos de solución, algunas son exactas, otras se hacen por medio de métodos numéricos y otras son aproximadamente analíticas; Para el presente trabajo en el cual analizamos el potencial lineal, este tipo de potencial el cual es conocido y ha sido tratado en los libros estándar de la Mecánica Cuántica [1] [2]. La solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo generalmente se realiza en términos de las funciones propias del Hamiltoniano y las funciones de Airy [3]; sin embargo, normalmente no se presenta una solución explícita para una condición inicial dada.

En este trabajo, utilizamos la técnica de separación de variables, para encontrar una solución analítica exacta de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con un potencial lineal $V(x) = -kx$. Este tipo de potencial lineal ha sido trabajado en diferentes artículos, en particular se trabaja definiendo un potencial lineal más una barrera infinita de potencial, en [4], se relaciona directamente con el efecto Stark, otro enfoque está dado por medio de la función canónica (CMF) [5], tomando de nuevo como soluciones naturales las funciones de Airy; también es aplicable a la solución de la ecuación de Schrödinger en campos gravitacionales como se desarrolla en [6]. Resolvemos el problema dejando las variables de la superposición de funciones de Bessel, las cuales pueden ser halladas dando condiciones iniciales.

2 Solución a la ecuación de Schrödinger por separación de variables.

Con el fin de estudiar el comportamiento de un sistema dinámico de partículas subatómicas, no relativistas es necesario partir de la Ecuación de Schrödinger [1]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad (1)$$

En donde el potencial $V(x)$ que nos interesa estudiar viene dado por $V(x) = -kx$, con $k > 0$. Como es usual se halla la solución de (1) utilizando el método de separación de variables; es decir, buscamos la función de onda de la forma:

$$\psi(x, t) = g(x)f(t) \quad (2)$$

Al sustituir (2) en (1) y aplicando el método de separación de variables se obtiene:

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{g''(x)}{g(x)} + V(x) \quad (3)$$

De la ecuación (3) se observa que el lado izquierdo solo depende de t , mientras que el lado derecho solo depende de x , por tanto, cada expresión debe corresponder a una constante que llamamos E .

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = E \quad (4)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{g''(x)}{g(x)} + V(x) = E \quad (5)$$

La solución general de la ecuación (4) es:

$$f(t) = C_1 e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad (6)$$

La ecuación (5) toma la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} g''(x) + (V(x) - E)g(x) = 0 \quad (7)$$

Reemplazando el valor del potencial $V(x) = -kx$, y reordenando se obtiene:

$$g''(x) + \left(\frac{2mkx}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) g(x) = 0 \quad (8)$$

Con el fin de simplificar la expresión de esta ecuación diferencial, sin perder generalidad, se introducen los parámetros a , b dados así:

$$a = \frac{2mk}{\hbar^2}; \quad b = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Luego (8) toma la forma:

$$g''(x) + (ax + b)g(x) = 0 \quad (9)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$g(x) = h(y); \quad \text{con} \quad y = \frac{(ax + b)}{\sqrt[3]{a^2}} \quad (10)$$

Con lo cual,

$$g'(x) = \sqrt[3]{a} h'(y); \quad g''(x) = \sqrt[3]{a^2} h''(y) \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (10) se tiene que ésta se transforma en:

$$h''(y) + yh(y) = 0 \quad (12)$$

La ecuación (12) corresponde a la ecuación de Airy cuyas soluciones en términos de las funciones de Airy se encuentran en la literatura [3]. Nuestro trabajo al ser de carácter divulgativo, está en presentar la solución deducida en forma natural. Tomando h de la forma

$$h(y) = y^\alpha \phi(v) \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en la ecuación (12) y multiplicando ambos términos de la ecuación diferencial, por $y^{2-\alpha}$, se obtiene

$$y^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \phi''(v) + \left(2\alpha y \frac{dv}{dy} + y^2 \frac{d^2 v}{dy^2} \right) \phi'(v) + (y^3 + \alpha(\alpha - 1)) \phi(v) = 0 \quad (14)$$

Asumiendo v de la forma,

$$v = Cy^\beta \quad (15)$$

de tal manera que

$$\frac{dv}{dy} = C\beta y^{\beta-1}, \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = C\beta(\beta - 1)y^{\beta-2}$$

Por lo tanto (15) transforma la ecuación (14) en

$$v^2 \phi''(v) + \left(\frac{2\alpha + \beta - 1}{\beta} \right) v \phi'(v) + \left(\frac{1}{\beta^2} y^3 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\beta^2} \right) \phi(v) = 0$$

Si escogemos α de modo que $\frac{2\alpha + \beta - 1}{\beta} = 1$, entonces $\alpha = \frac{1}{2}$. Tomando estos valores se tiene:

$$v^2 \phi''(v) + v \phi'(v) + \left(\frac{1}{\beta^2} y^3 - \frac{1}{4\beta^2} \right) \phi(v) = 0 \quad (16)$$

Escogiendo β de modo que

$$\frac{1}{\beta^2} y^3 = v^2 \quad (17)$$

Sustituyendo (17), en (16) se cumple que

$$\frac{1}{\beta^2} y^3 = C^2 y^{2\beta}$$

esto es $\beta = \frac{3}{2}$, y con ello $C^2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{4}{9} \rightarrow C = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, la ecuación (17) toma la forma:

$$v^2 \phi''(v) + v\phi'(v) + \left(v^2 - \frac{1}{9}\right) \phi(v) = 0 \quad (18)$$

La cual corresponde a una ecuación de Bessel, de orden $1/3$, así que la solución general de (18) viene dada por:

$$\phi(v) = C_2 J_{\frac{1}{3}}(v) + C_3 J_{-\frac{1}{3}}(v) \quad (19)$$

C_2 y C_3 son constantes arbitrarias. Finalmente retornando a las variables originales, de la ecuación (18) se obtiene la solución de (1)

$$\psi(x, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \sqrt{ax + b} \left(D_1 J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3a} (ax + b)^{3/2} \right) + D_2 J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3a} (ax + b)^{3/2} \right) \right) \quad (20)$$

Donde $a = \frac{2mk}{\hbar^2}$ y $b = \frac{2mE}{\hbar^2}$, D_1, D_2 constantes arbitrarias.

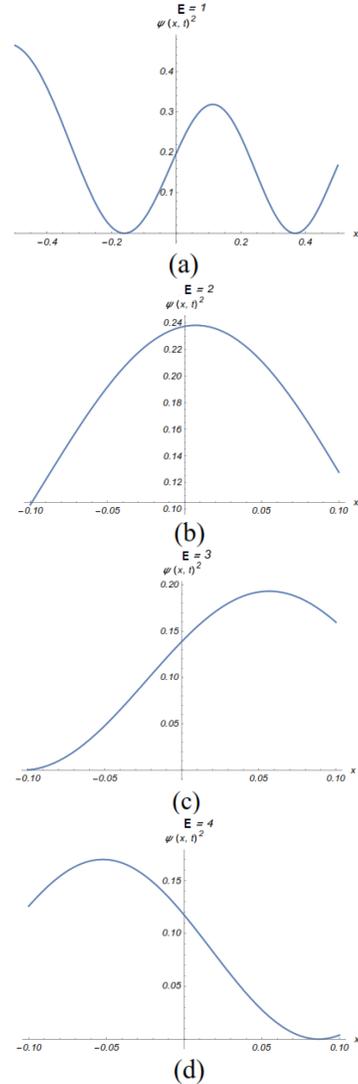


Figura 2: Las gráficas (a-d) corresponden $|\psi(x, t)|^2$ relacionada a la ecuación (20) en el estado inicial ($t = 0$), variando $E = 1, 2, 3, 4$.

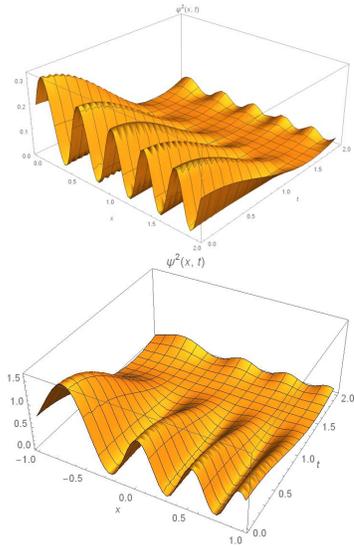


Figura 1: (a) Función $|\psi(x, t)|^2 \approx D_1 J_{\frac{1}{3}}(v)$ (b) Función $|\psi(x, t)|^2 \approx D_1 J_{\frac{1}{3}}(v) + D_2 J_{-\frac{1}{3}}(v)$.

3 Conclusiones y discusiones

En este trabajo se calculó la función de onda $\psi(x, t)$ para un potencial lineal $V(x) = -kx$, de forma simple por medio de separación de variables, encontrando la solución en términos de las funciones de Bessel $J_{1/3}(v)$; $J_{-1/3}(v)$, consideramos que el método seguido en el presente artículo para encontrar la función de onda $\psi(x, t)$ es más simple optimizando el método de separación de variables, que la presentada en los textos que involucran las funciones de Airy. La Figura1, puede ser comparada con las obtenidas en [7] se observa que el comportamiento de la funciones es idéntico y ha sido obtenido por dos métodos diferentes. En la Figura 2 se presenta la solución para la función $|\psi(x, t)|^2$ para el estado inicial $t = 0$ variando $E = 1, 2, 3, 4$, se observa el comportamiento oscilante, similar al obtenido al tomar las funciones de Airy como solución, lo cual puede ser comparado con [5].

Reconocimientos

Los autores manifiestan su agradecimiento a la Vicerrectoría de investigaciones de la Universidad de Pamplona, por su apoyo mediante el proyecto de investigación identificado con código 400-156.012-032 (GA313-BP-2017-PHASE II)

Referencias

- [1] N. Zettili., Quantum Mechanics. Concepts and Applications, John Wiley and Sons, Inc., second edition, 2009.
- [2] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, John Wiley and Son, 1998.
- [3] Olivier Vallée and Manuel Soares, Airy Functions and Applications to physics, New Jersey: Word Scientific, 2004.
- [4] R. W. Roninett, «The Stark effect in linear potentials,» European Journal of Physics, vol. 31, n° 1, pp. 113, 2009.
- [5] L. Farhang Martin , H. B. H y F. Ahmadi, Solving Schorodinger equation apECIALIZING to the Stark effect in linear potential by canonical function method., J. theor Appl Phys, Vols. 1 de DOI 10.1007/s40094014-0140-x, p. 8:140, 2014.
- [6] P. W. Langhoff., Schorodinger particle in a gravitational well., Am. J. Phys., vol. 39, pp. 954-7, 1971.
- [7] F. E. soto y H. M. Moya Cessa, Solution of the Schrodinger Equation for a Linear, Appl. Math. Inf. Sci doi.org/10.12785/amis/090123, vol. 1, n° doi.org/10.12785/amis/090123, pp. 175-181, 2015.