



## Construcción de la integral por recorrido para la teoría de Dirac a través de las transformaciones de Fourier de las funciones de Green

Becerra A<sup>1</sup>, J. Barba-Ortega<sup>2</sup>, Santiago L<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo Integrar.Universidad de Pamplona, Colombia

<sup>2</sup>Grupo de Física de Nuevos Materiales.Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

### Resumen:

Una estructura de la integral por recorrido para el electrón relativista es propuesta en este trabajo. En la construcción de esta integral es utilizada la ecuación de Einstein-Smolukhovski y las transformaciones de Fourier para cada una de las funciones de Green. Se hace un análisis de esta integral para tres, cuatro y N puntos fijos en la trayectoria del electrón.

**Palabras Clave:** ecuación de Einstein-Smolukhovski, transformaciones de Fourier, funciones de Green, trayectoria del electrón.

### Construction of the integral per round for the Dirac theory through Fourier transforms of the Green functions

#### Abstract

A path integral structure for relativistic electron is proposed. The Einstein-Smolukhovski equation and the Fourier transformations for the Green functions are taken into account to this end. An analysis of this path integral for three, four an N points at electron trajectory is made.

**Keywords:** Smolukhovski Einstein equation, Fourier transforms, Green's functions, the electron trajectory

#### Resumo:

A estrutura da integral de caminho elétron relativista é proposto neste trabalho. Nesta construção integral é usada a equação de Einstein Smolukhovski e transformações de Fourier para cada uma das funções de Green. Uma análise deste integral para três, quatro e N pontos fixos na trajetória do elétron.

**Palavras-chave:** Smolukhovski Einstein equação, transformadas de Fourier, funções de Green, a trajetória de elétrons.

*\*Para citar este artículo:* Becerra A, Barba-Ortega J, Santiago L. Construcción de la integral por recorrido para la teoría de Dirac a través de las transformaciones de Fourier de las funciones de Green. Bistua.2012.10(2):36-40.

+ Autor para el envío de correspondencia y la solicitud de las separatas: Becerra Rey A. Universidad de Pamplona. Departamento de Física y Geología. email: arik@fisica.ru

Recibido: Agosto 16 de 2011 Aceptado: Octubre 05 de 2012

1.-Introducción

Las integrales por recorrido para la teoría de Dirac representan un tema actual en la Física Teórica y el problema de su construcción es un problema abierto en nuestros días. Cabe mencionar algunos trabajos como los de Takashi Ichinose [15], en donde se analiza la construcción de una integral por recorrido para la ecuación radial de Dirac, obteniéndose una representación integral de camino usando la función de Green para la ecuación radial de Dirac. El trabajo de B. Gaveau [16] describe un camino de recorrido para la ecuación de Dirac y la derivación del piin espacial, donde se construye un nuevo tipo de integral por recorrido para el propagador de la ecuación de Dirac.

En el presente trabajo se propone una nueva alternativa para la construcción de las integrales por recorrido para el propagador e Dirac. Teniendo en cuenta las cualidades matemáticas de las transformaciones de Fourier y su facilidad en interpretación y operación, se propone construir las integrales por recorrido expresadas a través de las transformaciones de Fourier para cada uno de los propagadores de Dirac correspondientes a las transiciones entre punto y punto de la trayectoria del electrón. Los propagadores de Dirac son por naturaleza funciones generalizadas o distribuciones y por lo tanto es indispensable tratarlos como tales. Por esto mismo, como punto de partida para la construcción de las integrales por recorrido se toma la ecuación de Einstein-Smolukhovski que, en su forma de la teoría de distribuciones, para tres puntos fijos  $t_0, t_L, t_2$  en la trayectoria del electrón toma la forma:

$$\int \int_{D_{t_2-t_1}^m} (\Delta x_2)_{D_{t_1}^m} (\Delta x_1)_{D_{t_0}^m} (\Delta x_1 + \Delta x_2)_{D_{t_2}^m} \delta^{(3)}(x_1) \delta^{(3)}(x_2) = \int_{D_{t_2}^m} (\Delta x)_{D_{t_0}^m} \delta^{(3)}(x) \quad (1)$$

En donde los propagadores de Dirac  $D$  están dados para los diferentes puntos, y  $\varphi$  son las funciones finitas que surgen de la teoría de distribuciones. En la ecuación (1) las integrales están expresadas a través de las

tres coordenadas espaciales, es decir a la izquierda de esta ecuación se tienen seis integrales con respecto a las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ . En la figura 1 se ilustra la forma de la trayectoria para estos tres puntos.

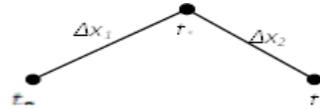


Figura 1. Trayectoria recorrida por un electrón desde  $x_0$  hasta  $x_2$ .

Teniendo en cuenta las transformaciones de Fourier para cada uno de los propagadores, se puede escribir la forma de las integrales por recorrido expresada a través de estas transformaciones

$$\int \left\{ \prod_{j=1}^N \tilde{D}_{x_j}^*(a_j w) \right\} \varphi(w) d^{(3)}w,$$

donde  $\tilde{D}_{x_j}^*$  son las transformadas de Fourier para los propagadores de Dirac.

**Función de Green**

La función de Green para la ecuación de Dirac es por definición aquella solución  $D$  que satisface la ecuación

$$\left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + iml \right) \gamma^0 D_t^m(x) = \delta^4 I, \quad (2)$$

en donde  $D_t^m$  se denota como el propagador dado para el electrón con masa  $m_0$  y con  $t$  como el tiempo que juega en esta ecuación el papel de parámetro. La función de Green tiene la forma

$$D_t^m(x) = \gamma^0 \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - iml \right) G_t,$$

en donde  $G_t$  es la función de Pauli-Jordan

$$G_t = \left[ \frac{\delta(t^2 - x^2)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi} \theta(t - x) \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right] \quad (3)$$

expresada en el sistema de unidades  $c=1$ ,  $\theta$  es la función de Heaviside y  $J_1$  la función de Bessel de primer orden. La interpretación física de la función de Pauli-Jordan la dio por primera vez Bogoliubov, y describe el cono de luz para la partícula relativista. Como se puede ver, el primer término de esta función, correspondiente a la función delta, representa la superficie del cono, mientras que el segundo término, que contiene la función  $\theta$  representa el interior del cono. Podemos observar que cuando las coordenadas  $x$  superan  $ct$  este segundo término es anulado por la función  $\theta$ , es decir el electrón no puede salirse del cono de luz, lo que concuerda con la teoría especial de la relatividad. Cuando  $x=ct$  solo queda el primer término que corresponde entonces a la función de Pauli-Jordan para el neutrino, partícula relativista que carece de masa y se desplaza por la superficie del cono, es decir a una velocidad igual a la velocidad de la luz.

### Transformada de Fourier para el propagador de Dirac

La transformada de Fourier para el propagador (2) se puede calcular por la fórmula de la transformación de Fourier:

$$\tilde{D}_t^m(w) = \int D_t^m(x) e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx \quad (4)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (3) la transformada de Fourier explícitamente tiene la forma:

$$\tilde{D}_t^m(w) = \int \gamma^0 \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - imI \right) \left[ \frac{\delta(t^2 - x^2)}{2\pi} - \frac{m}{4\pi} \frac{\theta(t-x) J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right] e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx \quad (5)$$

Operando la expresión dentro de la integral obtenemos después de ciertas operaciones matemáticas para la primera parte:

$$\int \gamma^0 \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - imI \right) \left[ \frac{\delta(t^2 - x^2)}{2\pi} \right] e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx = I \cos wt - iy^0 [(y, w) + Im] \frac{\text{sen } wt}{w} \quad (6)$$

Para este resultado se utilizó la propiedad de las distribuciones que permite transmitir la derivación de la función delta hacia la exponencial cambiándole de signo. Además se utilizaron algunas propiedades de las funciones coseno y seno.

Para la segunda parte de (5) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int \gamma^0 \left( \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - imI \right) \left[ \frac{m}{4\pi} \frac{\theta(t-x) J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right] e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx \\ &= -I \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m}{4\pi} \theta(t-x) \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx \\ &+ \gamma^0 (y, w) \int \frac{m}{4\pi} \theta(t-x) \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx \\ &+ iy^0 m \int \frac{m}{4\pi} \theta(t-x) \frac{J_1(m\sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} e^{i(w, x)} \delta^3(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

en donde  $(y, w)$  es simplemente  $\gamma^1 w_1 + \gamma^2 w_2 + \gamma^3 w_3$ . En el cálculo de (7) resultan expresiones matemáticas muy extensas que no valen la pena escribir aquí. Nos limitamos simplemente a escribir el resultado. La expresión (7) finalmente toma la forma:

$$-I \cos wt + I \cos(\tau\sqrt{m^2 + w^2}) + iy^0 [(y, w) + Im] \left\{ \frac{\text{sen } wt}{w} - \frac{\text{sen}(\tau\sqrt{m^2 + w^2})}{\sqrt{m^2 + w^2}} \right\} \quad (8)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (5), (6) y (8) obtenemos la expresión para la transformada de Fourier para el propagador de Dirac:

$$\tilde{D}_t^m(w) = I \cos(\tau\sqrt{m^2 + w^2}) - iy^0 [(y, w) + Im] \frac{\text{sen}(\tau\sqrt{m^2 + w^2})}{\sqrt{m^2 + w^2}} \quad (9)$$

Como podemos ver, la transformada de Fourier es una función analítica expresada a través de las funciones seno y coseno, y no sufre de complicaciones matemáticas como la función de Green directa, la cual contiene las funciones delta de Dirac y de Heaviside.

Estructura de la integral por recorrido

Tomando la transformada de Fourier de la Solución Fundamental de la ecuación de Dirac (ecuación (9)) se verifica que se cumple el principio de la causalidad para el intervalo de tiempo  $t_1 \leq \tau \leq t_2$ . Se halla entonces la expresión:

$$\tilde{D}_{t_2-t}^m \cdot \tilde{D}_{t-t_1}^m$$

la cual, luego de ciertos cálculos matemáticos adquiere la forma:

$$\tilde{D}_{t_2-t}^m \cdot \tilde{D}_{t-t_1}^m = I \cos[(t_2 - t_1)\sqrt{m^2 + w^2}] - \frac{iy^0 (y, w) + Im}{\sqrt{m^2 + w^2}} \text{sen}[(t_2 - t_1)\sqrt{m^2 + w^2}] \quad (10)$$

lo que significa que se cumple el principio de la causalidad:

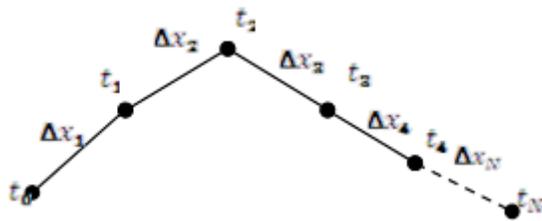
$$\tilde{D}_{t_2-t}^m \cdot \tilde{D}_{t-t_1}^m = \tilde{D}_{t_2-t_1}^m$$

para tres puntos  $t_1, t, t_2$ . Si se toman ahora cuatro puntos fijos en la trayectoria de la partícula, entonces podemos escribir las transformadas de Fourier de las funciones de Green para los cuatro puntos y verificar de la misma forma que (10), que se cumple el principio de la causalidad:

$$\tilde{D}_{t_4-t_3}^m \cdot \tilde{D}_{t_3-t_2}^m \cdot \tilde{D}_{t_2-t_1}^m = \tilde{D}_{t_4-t_1}^m$$

Donde  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ . Cabe destacar que los cálculos matemáticos se hacen más complejos a medida que se aumenta el número de puntos. Sin embargo se puede hacer una generalización y escribir la expresión para una trayectoria en donde se tienen N puntos fijos. Para este caso tenemos que se cumple

$$\tilde{D}_{t_N-t_{N-1}}^m \cdot \tilde{D}_{t_{N-1}-t_{N-2}}^m \cdots \tilde{D}_{t_2-t_1}^m \cdot \tilde{D}_{t_1-t_0}^m = \tilde{D}_{t_N-t_0}^m \quad (11)$$



**Figura 2.:** Trayectoria recorrida por un electrón desde  $x_0$  hasta  $x_N$ . En resumen, la expresión (11) se puede escribir

$$\tilde{D}_{\Delta t_j}^m \cdot \tilde{D}_{\Delta t_{j-1}}^m \cdots \tilde{D}_{\Delta t_2}^m \cdot \tilde{D}_{\Delta t_1}^m = \prod_{j=1}^n \left\{ \cos[(\Delta t_j)\sqrt{m^2 + w^2}] - \frac{iy^0 G_j(w) + Im}{\sqrt{m^2 + w^2}} \text{sen}[(\Delta t_j)\sqrt{m^2 + w^2}] \right\}$$

donde  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ .

Por otro lado, la parte izquierda del principio de causalidad para la solución fundamental de la ecuación de Dirac (ecuación (1)), puede ser analizada dentro del margen de la teoría de funciones generalizadas como un conjunto cilíndrico de trayectorias generalizadas  $x(\tau)$ , las cuales satisfacen las condiciones [10]:

$$\int_0^t a_l(\tau) dx(\tau) = A_l, \quad l = 1, \dots, n < \infty,$$

donde  $a_l(\tau)$  son funciones dadas de cualquier tipo;  $A_l$  son vectores tridimensionales que juegan el papel de base del conjunto cilíndrico. Entonces la integral por recorrido para la teoría de Dirac se puede definir por la integral

$$\int_N \left\{ \prod_{j=1}^N D_{\Delta x_j}^m \right\} \varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) d^{(s)}x_1 \cdots d^{(s)}x_N,$$

la cual, expresada a través de las transformadas de Fourier toma la forma:

$$\int \left\{ \prod_{j=1}^N \tilde{D}_{\Delta x_j}^*(a_j w) \right\} \tilde{\varphi}(w) d^{(s)}w, \quad (12)$$

obteniéndose una estructura de la integral por recorrido para la ecuación de Dirac en función de su solución fundamental y de las transformaciones de Fourier para dicha solución. Cada una de estas transformadas representa la transformada de Fourier de cada una de las funciones de Green, que a su vez describe la evolución del electrón como una fuente puntual de acción instantánea, tal como se define la función de Green.

Es importante recalcar que la integral por recorrido es una forma de descripción de la mecánica cuántica, que permite entender desde otro punto de vista los problemas del micromundo en comparación con la mecánica de operadores. La fórmula (12) permite hacer operaciones matemáticas mucho más sencillas que utilizando la solución fundamental directamente. Además por la igualdad de Parseval podemos en cualquier



40  
momento pasar a la función directa para obtener resultados físicos concretos.

### Conclusiones

La transformada de Fourier de la Función de Green puede ser expresada a través de funciones analíticas como las funciones seno y coseno.

La estructura de la integral por recorrido para la ecuación de Dirac puede ser representada en función de las transformadas de Fourier de las funciones de Green; estas últimas describen una fuente puntual de acción instantánea que se propaga a través del tiempo. La transformada de Fourier matemáticamente puede tener la misma representación que la función directa, y esto se expresa claramente en la igualdad de Parseval. Teniendo en cuenta lo anterior, finalmente se propone una estructura para la integral por recorrido para la Teoría de Dirac en el caso de la partícula libre.

### Referencias Bibliográficas

- [1] Bogoliubov N. and Shirkov D. Introduction to Theory of Quanted Fields (Moscow: Nauka Press). 1976.
- [2] Feynman, R. P., and Hibbs, A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals, New York: McGraw-Hill, 1965.
- [3] Santos Bravo, Yuste. Métodos de la Física Matemática. Universidad Extremadura. 2003.
- [4] B, Thaller. The Dirac Equation (Springer-Verlag, 1992).
- [5] Kraev M. Mecánica Cuántica. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. 1989.
- [6] Sokolov A. A., Ternov I.M., Zhukovski V. y Borisov A. V. Electrodinámica Cuántica. ed. Mir. Moscú.1989.

[7] H.Goldstein. Mecanica Clasica. (Editorial Ariel, Barcelona.).

[8] Jhon P. Costella, Bruce Mckellar. The Foldy-Wouthyusen Transformation. (School of physics, The University of Melbourne, Australy, 1995.)

[9] Bateman H. Tables of Integral Transforms vol 2 (McGraw-Hill Book Company, Inc). 1953.

[10] Becerra A. R. Análisis de la solución fundamental de la ecuación de Dirac como una distribución. Phd. Tesis. 2003.

[11] G.B. Arfken. H.J. Weber. Mathematical Methods for Physicist. (Harcourt Academic Press). 5 ed. 2002.