CONSTRUCCIÓN DE UN PROCESO ESTOCÁSTICO CONTINUO PARA SIMULAR EL MOVIMIENTO DE CAUDALES MEDIOS EN EL RIO PAMPLONITA (PAMPLONA, NORTE DE SANTANDER) EN EL MARCO DE LA AXIOMATICA DE ANDREY KOLMOGOROV

Fecha de recepción: Noviembre 1 de 2014
Fecha de aprobación: Febrero 7 de 2015

Mario Andrés Botto Rojas
Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, Grupo Visión Colombia Hídrica, Proyecto de Investigación ING 1770 de 2015, Bogotá, Colombia, u1101566@unimilitar.edu.co
Hebert Gonzalo Rivera
Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, Grupo Visión Colombia Hídrica, Proyecto de Investigación ING 1770 de 2015, Bogotá, Colombia, hebert.rivera@unimilitar.edu.co

Resumen
El objetivo del trabajo es aplicar la axiomática de Andrey Kolmogorov en la construcción de un proceso estocástico para el caso de los valores medios de caudales del río Pamplonita. La definición formal de un proceso estocástico se da en los siguientes términos. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, T un conjunto indexado y $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ un espacio medible. Un $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ proceso estocástico valorado en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una familia (Xt) de variables aleatorias, tal que (Xt) : $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$. Aquí se tiene que $t \in T$; generalmente en ingeniería se toma a T como una variable de espacio o del tiempo. En el trabajo se aplican con ejemplos en caudales medios del río Pamplonita los conceptos de espacio muestral, evento, sigma álgebra, espacio medible, variable aleatoria continua, espacio de probabilidad y proceso estocástico. El trabajo se desarrolló en el marco del proyecto de investigación UMNG ING 1770 de 2015, con recursos financieros de la Vicerrectoría de Investigaciones y en conjunto con la Universidad de Pamplona.

Palabras Clave: Variable aleatoria, proceso estocástico, Rio Fonce

Área temática: Modelación y simulación de sistemas ambientales.

Abstract
The aim of this work is to apply the axiomatic of Andrei Kolmogorov in the construction of a stochastic process for the case of the average values of the Pamplonita river flows. The formal definition of a stochastic process is given in the following terms. Let (Ω, F, P) be a probability space, T is called the index set and $\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}$ a measurable space. A $(\bar{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ stochastic process is valued in (Ω, F, P) is a family (Xt) of random variables, such that (Xt) : $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$.. Here t ∈T; usually in engineering a variable T is taken as a variable of space or time. The work applies in examples with the average flows of Pamplonita´s River the concepts of sample space, event, sigma- algebra, measurable space, continuous random variable, probability space and stochastic process. The work was

developed under the research project 1770 ING UMNG 2015, with funding of the Investigation´s office and together with the University of Pamplona.

Keywords: Ramdon function, stochastic process, Pamplonita River

INTRODUCCIÓN

Pamplona es un municipio Colombiano perteneciente al Departamento Norte de Santander ubicado al nor-oriente del país; el Instituto Geográfico Agustín Codazzi, ubica la cabecera municipal a 07° 22´ 41” de latitud Norte y 72° 39´ 09” de longitud Oeste a un altura sobre el nivel del mar de 2300 metros; la temperatura ambiente promedio es de 15,4°C [4]

La cuenca del río Pamplonita se ubica sobre la Cordillera Oriental, extendiéndose por el suroeste de Norte de Santander, desde Pamplona hasta Puerto Santander. En la urbanización La Rinconada en Cúcuta comienza a buscar el oriente, por dónde viene raudo el Táchira. Cuentan los cucuteños de antes que el río bajaba por la avenida primera y que sus inundaciones o crecidas eran temidas. En ocasiones se lanzó hasta la avenida segunda y bajó soberbio por el parque Colón y el hospital. [3].

Este trabajo trata sobre la construcción de un proceso estocástico en caudales medios del río Pamplonita aplicando la axiomática de Andrey Kolmogorov. La teoría moderna de procesos estocásticos centra su atención en los conceptos de sigma álgebra, espacio medible, filtraciones, martingalas, variable aleatoria y espacio de probabilidad.

La importancia del trabajo radica en que existe muy poca bibliografía que explique en forma clara y sencilla la construcción de un proceso estocástico. Los datos de los valores medios de caudales fueron aportados en forma gratuita por el Instituto IDEAM y con soporte en éstos se construyeron los conceptos.

MÉTODOS

Se aplica la axiomática de Kolmogorov para construir los conceptos de espacio muestral, eventos, sigmas álgebras, espacios medibles, variable aleatoria y espacio de probabilidad.

La definición formal de un proceso estocástico se da en los siguientes términos [1]. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, T un conjunto indexado y $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ un espacio medible. Un $(\Omega, \bar{\mathcal{F}})$ proceso estocástico valorado en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una familia (Xt) de variables aleatorias (Xt): $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$. Aquí se tiene que $t \in T$; generalmente en ingeniería se toma a T como una variable de espacio o del tiempo. Como se puede apreciar, el concepto fundamental para obtener un proceso estocástico es la familia de variables aleatorias Xt, que son funciones que mandan valores de un espacio medible (Ω, $\mathcal{F}$) a otro espacio medible ($\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}$). Los espacios medibles se construyen sólo con las sigmas álgebras y éstas a su vez surgen de los espacios muestrales Ω y $\bar{\Omega}$. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias Xt, indexadas en el argumento T. [2]

Un experimento aleatorio es un proceso de carácter repetitivo hecho a partir de reglas bien definidas, con el fin de verificar o de comprobar una teoría o hipótesis, cuyos resultados están sujetos o influidos por el azar [3].

Para el caso del río Pamplonita se asume que el experimento consiste en los giros de traslación y rotación de la esfera Tierra, con las respectivas incidencias en el comportamiento del río Pamplonita.

Un espacio muestral es un conjunto de los posibles resultados del experimento aleatorio. Para el caso nuestro, los sucesos de los caudales medios se redujeron a tres aspectos relevantes: caudales favorables al canotaje, al abastecimiento de agua y a los procesos de socavación; por lo tanto, el espacio muestral cualitativo y discreto es el siguiente:
Se define como Omega (Ω) al conjunto de resultados posibles individuales de un experimento aleatorio. Cada resultado individual es conocido como elemento muestral (ω)

$\boldsymbol{\omega_1}$: Caudal de tratamiento.
$\boldsymbol{\omega_2}$: Caudal de Dilución.
$\boldsymbol{\omega_3}$: Caudal de socavación.

Los elementos muestrales se representan cualitativamente dentro del conjunto omega (Ω) como sigue:

$$\boldsymbol{\Omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]}$$

Los eventos son los subconjuntos de un espacio muestral. Para cualquier experimento dado podemos estar interesados en la ocurrencia de ciertos eventos más que en el resultado de un elemento especifico en el espacio muestral [8]. Los eventos A (en términos cualitativos) se expresan mediante el caudal de tratamiento (Tr), Dilución (Di) y socavación (Sc) formulándolos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A_1 = \omega_1}$$
$$\boldsymbol{A_2 = \omega_2}$$
$$\boldsymbol{A_3 = \omega_3}$$

La definición de sigma álgebra se da en los siguientes términos. Sea $\emptyset$ el conjunto vacío y Ω nuestro espacio muestral anterior, entonces, un sistema $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega \neq \emptyset$ se llama σ-algebra en el espacio Ω [1].

Las propiedades de una σ-álgebra son:
1. El conjunto vacío está en $\mathcal{F}$: $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Siendo A un evento que está en $\mathcal{F}$, también está su complemento.
3. Si A_1, A_2, A_3 ...es una sucesión de eventos de $\mathcal{F}$, entonces la unión y la intersección de éstos también está en $\mathcal{F}$.

Los complementos de los eventos son:
$\boldsymbol{A_1^c = \Omega - A_1 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) - (\omega_1) = (\omega_2, \omega_3)}$
$\boldsymbol{A_2^c = \Omega - A_2 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) - (\omega_2) = (\omega_1, \omega_3)}$
$\boldsymbol{A_3^c = \Omega - A_3 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) - (\omega_3) = (\omega_1, \omega_2)}$

La unión de los eventos es:
$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 = (\omega_1, \omega_2)}$
$\boldsymbol{A_1 \cup A_3 = (\omega_1, \omega_3)}$
$\boldsymbol{A_2 \cup A_1 = A_1 \cup A_2 = (\omega_1, \omega_2)}$
$\boldsymbol{A_2 \cup A_3 = (\omega_2, \omega_3)}$
$\boldsymbol{A_3 \cup A_1 = A_1 \cup A_3 = (\omega_1, \omega_3)}$
$\boldsymbol{A_3 \cup A_2 = A_2 \cup A_3 = (\omega_2, \omega_3)}$

La intersección es:
$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 = (\omega_1) \cap (\omega_2) = \emptyset}$
$\boldsymbol{A_1 \cap A_3 = (\omega_1) \cap (\omega_3) = \emptyset}$
$\boldsymbol{A_2 \cap A_3 = (\omega_2) \cap (\omega_3) = \emptyset}$

Cumpliendo las propiedades de una σ – Algebra, la sigma algebra total se formula como:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_T} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\emptyset, \Omega, (A_1), (A_2), (A_3),} \\ \boldsymbol{(A_1^c), (A_2^c), (A_3^c),} \\ \boldsymbol{A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3,} \\ \boldsymbol{A_1 \cap A_2,} \\ \boldsymbol{A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3} \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_T} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\emptyset, \Omega, (\omega_1), (\omega_2), (\omega_3), (\omega_1, \omega_2)} \\ \boldsymbol{, (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3)} \end{array} \right\}$$

Al par $\{\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}\}$ con $\overline{\Omega} \neq \emptyset$ y una $\overline{\mathcal{F}}$ como una σ-algebra sobre $\overline{\Omega}$ se le denomina espacio medible. A continuación se formula un espacio de estados $\overline{\Omega}$ que está contenido en una sigma-algebra $\overline{\mathcal{F}}$, y sus eventos (en términos cuantitativos) se relacionan mediante intervalos de caudales de los eventos a estudiar.

$$\boldsymbol{\overline{\Omega} = [0.2\ , 128.5]}$$

Evento caudal de tratamiento: $\boldsymbol{E_1 = [0.2\ , 3.8)}$

Evento dilución $(\boldsymbol{E_2})$: $\boldsymbol{E_2 = [3.8\ , 70.5)}$

Evento caudal de socavación $(\boldsymbol{E_3})$:

$$\boldsymbol{E_3 = [70.5\ , 128.5)}$$

El valor de 128.5 m^3/s se estableció como el caudal correspondiente al más alto valor posible en la sección transversal de la estación hidrológica.

Los complementos son:

$\boldsymbol{E_1^c = \Omega - E_1 = [3.8\,,128.5]}$
$\boldsymbol{E_2^c = \Omega - E_2 = [0.2, 3.8] \cup [70.5, 128.5]}$
$\boldsymbol{E_3^c = \Omega - E_3 = [3.8\,,70.5)}$

La unión es:

$\boldsymbol{E_1 \cup E_2 = [0.2\,,70.5]}$
$\boldsymbol{E_1 \cup E_3 = [0.2, 3.8] \cup [70.5, 128.5]}$
$\boldsymbol{E_2 \cup E_1 = E_1 \cup E_2 = [0.2\,,70.5]}$
$\boldsymbol{E_2 \cup E_3 = [3.8, 128.5]}$
$\boldsymbol{E_3 \cup E_1 = [0.2\,,3.8] \cup [70.5, 128.5]}$
$\boldsymbol{E_3 \cup E_2 = E_2 \cup E_3 = [3.8, 128.5]}$

La intersección es:

$\boldsymbol{E_1 \cap E_2 = [0.2\,,3.8) \cap [3.8\,,70.5) = \emptyset}$
$\boldsymbol{E_1 \cap E_3 = [0.2\,,3.8) \cap [70.5\,,128.5) = \emptyset}$
$\boldsymbol{E_2 \cap E_3 = [3.8\,,70.5) \cap [70.5, 128.5) = \emptyset}$

De acuerdo a lo anterior la sigma algebra total se formula como:

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\emptyset, \Omega, [E_1], [E_2], [E_3], [E_1^c], [E_2^c], [E_3^c],\ E_1 \cup E_2, E_1 \cup E_3, E_2 \cup E_3, E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_3, E_2 \cap E_3\}$$

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, [0.2\,,128.5], [0.2\,,3.8), \\ [3.8\,,70.5), [70.5\,,128.5), \\ [0.2\,,70.5], \\ \{[0.2\,,3.8] \cup [70.5, 128.5]\}, \\ [3.8, 128.5] \end{array} \right\}$$

La construcción de las variables continua se lleva a cabo de la siguiente manera. Una variable aleatoria X continua es una función medible definida sobre un espacio medible y se expresa con números reales. El interés de una variable aleatoria reside en permitirnos obviar el espacio de probabilidad abstracto
y trabajar sobre la recta real, conservando las características probabilísticas originales.

$$Sea\ X: \Omega \rightarrow \overline{\Omega}$$

Entonces $\boldsymbol{X: \{\omega_1\} \rightarrow [0.2, 3.8)}$
$\boldsymbol{\{\omega_2\} \rightarrow [3.8, 70.5)}$
$\boldsymbol{\{\omega_3\} \rightarrow [70.5, 128.5)}$

Donde

$\boldsymbol{\Omega = \{\emptyset, \Omega, [\omega_1], [\omega_2], [\omega_3]\}}$
$\boldsymbol{\overline{\Omega} = \{\emptyset, [0.2, 3.8), [3.8, 70.5), [70.5, 128.5)\}}$

Al considerar un espacio medible ($\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}$) y una función $X: \overline{\Omega} \rightarrow R$, la variable aleatoria debe cumplir:

$$\boldsymbol{X^{-1}(E) \in \bar{\mathcal{F}}, \forall\, E \in \mathcal{F}}$$

Dadas las condiciones anteriores se procede a demostrar si efectivamente nuestra X en el caso anterior es una variable aleatoria.

$$\boldsymbol{X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}}$$
$$\boldsymbol{X^{-1}(\{0.2, 3.8\}) = \{w \in \mathcal{F}: X(w) \in \{0.2, 3.8\}\} = [\omega_1] \in \mathcal{F}}$$
$$\boldsymbol{X^{-1}(3.8, 70.5) = [\omega_2] \in \mathcal{F}}$$
$$\boldsymbol{X^{-1}(70.5, \quad 128.5) = [\omega_3] \in \mathcal{F}}$$
$$\boldsymbol{X^{-1}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) \in \mathcal{F}}$$

Con la anterior comprobación vemos que X es $\mathcal{F} - \bar{\mathcal{F}}$ medible, por lo tanto X se constituye como una variable aleatoria en un espacio medible. El siguiente paso después de la comprobación y la obtención de la variable aleatoria es la construcción del espacio de probabilidad. Se denomina espacio de probabilidad a los elementos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y es una descripción del experimento que describe a cual conjunto pertenecen los posibles resultados del experimento, cuantificando la incertidumbre en la ocurrencia de sucesos mediante la medida de probabilidad P (ver la figura 1).

X_1		X_2	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.27	1	0.37
2	0.73	2	0.63
3	0	3	0

X_3		X_4	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.35	1	0.25
2	0.65	2	0.74
3	0	3	0.01

X_5		X_6	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.23	1	0.24
2	0.77	2	0.76
3	0	3	0

X_7		X_8	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.33	1	0.4
2	0.67	2	0.6
3	0	3	0

X_9		X_{10}	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.32	1	0.19
2	0.68	2	0.81
3	0	3	0.01

X_{11}		X_{12}	
$\bar{\Omega}$	P	$\bar{\Omega}$	P
1	0.12	1	0.14
2	0.87	2	0.86
3	0.01	3	0

Figura 1. Valores de P en cada evento

El comportamiento temporal de los caudales medios en el río Pamplonita se refleja en la figura 2, en la cual se establecen 12 variables aleatorias, una por cada mes.

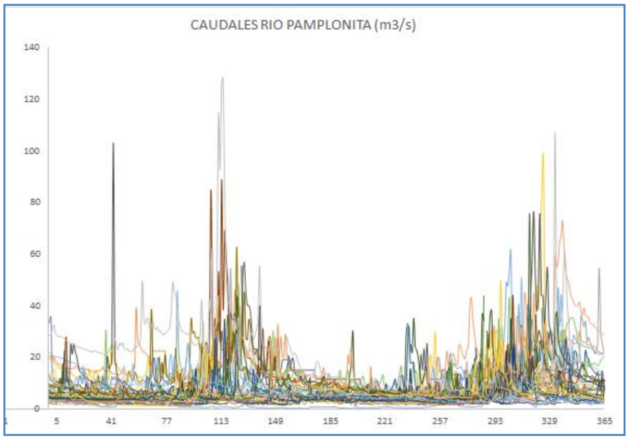

Figura 2. Comportamiento temporal e caudales medios del río Pamplonita

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos fueron aportados en forma gratuita por el en La Don Juana. Para cada mes se construyó una variable aleatoria.

Se constata que formalmente se puede construir el concepto de proceso estocástico en el marco de la axiomática de Kolmogorov.

4 CONCLUSIONES

El trabajo demuestra que en valores de caudales medios del río Pamplonita se logró construir variables aleatorias en la axiomática de Kolmogorov y así soportar formalmente la creación de un proceso estocástico.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Liliana Blanco Castañeda. (2003). Probabilidad. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

V. Capasso, An introduction to continuous-time stochastic processes, 2nd ed. Boston, EE.UU. Birkhäuser, 2012.

José Bonnet. (2012).Lecciones de estadística: Estadística descriptiva y probabilidad. España. Ed club universitario.

http://www.camacolnorte.com/2013/02/el-rio-pamplonita-de-ayer-y-de-hoy.html

Rodriguez S., Juan G., Quintana C., César D., Rivera A., Héctor U., Mosquera T., Jemay. (2013). Zonificación del peligro de remoción en masa en las zonas urbanas según método de análisis mora y vahrson: estudio de caso. Revista Ambiental Agua, Aire y Suelo. ISSN 1900-9178, 4 (1). pp: 13 - 22.