



## APLICACIÓN DEL MODELO ESTOCÁSTICO WIENER-FPK EN CAUDALES MEDIOS DEL RIO FONCE EN CONDICIONES DEL SISTEMA DE PEARSON

**Recibido: Octubre 25 de 2015**

**Aprobado: Febrero 6 de 2016**

Juan Sebastián Rojas Ramírez

Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, Grupo Visión Colombia Hídrica,

Proyecto de Investigación ING 1770 de 2015

Bogotá, Colombia

u1101505@unimilitar.edu.co

### RESUMEN

El objetivo del trabajo es construir un modelo determinista para simular el comportamiento de los caudales medios del Río Fonce y a partir de este deducir la correspondiente ecuación Fokker-Planck-Kolgomorov - FPK así como también enlazar la FPK al proceso estocástico tipo Wiener y al sistema de Pearson. La primera etapa consiste en aplicar la FPK, usando el método numérico y posteriormente se deducirá para el proceso estocástico tipo Wiener la respectiva ecuación FPK y finalmente se modelará el comportamiento de los caudales medios mediante el modelo FPK-Pearson. Los resultados pertenecen a la etapa 1 y demuestran que es viable aplicar el modelo FPK, al comportamiento de los caudales medios. El trabajo se desarrolló en el marco de investigación UMNG ING 1770 de 2015, con recursos financieros de la Vicerrectoría de investigaciones y en conjunto con la universidad de Pamplona.

**PALABRAS CLAVE:** Ecuación Fokker-Planck-Kolgomorov, Proceso estocástico, proceso estacionario, proceso no estacionario

**ÁREA TEMÁTICA:** Modelación y simulación de sistemas ambientales.

### ABSTRACT

The object of this work is build a deterministic model to simulate de behavior of the Fonce River average streamflows and from that deduce the corresponding the Fokker-Planck-Kolgomorov equation FPK as well as also link the FPK to the Wiener stochastic process and Pearson system. The first stage consists in apply the FPK, using the numerical method, later will deduce to the Wiener



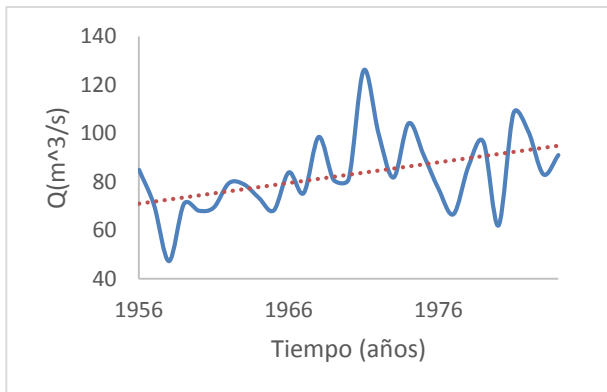
stochastic process the respective FPK equation and finally will model the behavior of the average streamflows through the FPK-Pearson model. The results belong to the stage 1, shows that is viable to apply the FPK model, to the average streamflows behavior. This work was developed in the framework research UMNG ING 1770 in 2015, with economical resources of the vice-rector of search and together with Pamplona's college.

**KEYWORDS:** FPK equation, stochastic process, stationary process, non-stationary process

## INTRODUCCIÓN

Las emisiones a la atmósfera amplían por sinergia los efectos de la contaminación del aire ya sea indirectamente por el impacto en las condiciones meteorológicas o mediante los efectos directos causados sobre la salud de los seres vivos el agua y los suelos (Palacios, 2014). La contaminación del aire por material particulado (PM) es un problema mundial y en los últimos años, el PM se ha convertido en un tema importante de investigación ya que tiene un impacto negativo significativo en la salud humana (Quijano et al 2014). Debido a ello, en las últimas décadas el cambio climático es un fenómeno que se ha venido estudiando y desde el siglo XIX y se considera que su desarrollo data desde el año 1950 (IPCC, 2013) teniendo como su más importante consecuencia el calentamiento global. Se presumen que este fenómeno ha desestabilizado el comportamiento meteorológico alrededor del mundo con las respectivas situaciones de desastres e innumerables pérdidas económicas y humanas.

A raíz del cambio climático los procesos hidrológicos en la hidrosfera podrían alterar su comportamiento histórico y por lo tanto se requiere complementar los modelos estadísticos clásicos (que estudian procesos estacionarios), de tal manera que la modelación se lleve a cabo con la teoría de procesos no estacionarios. Se conocen casos en los cuales en algunos ríos las variables hidrológicas o presentan aumentos tendenciales o disminuciones durante varios años: en la estadística clásica se asume que los parámetros estadísticos en general permanecen constantes a lo largo del tiempo, pero en el caso de algunos los ríos no se cumple esta condición. Un ejemplo claro de estos comportamientos no estacionarios en el tiempo es el de los caudales medios en el Rio Fonce (San Gil, Santander) pues a lo largo del tiempo su valor medio no permanece constante (figura 1). En los casos de procesos no estacionarios se suele utilizar el modelo Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) o también conocido como Fokker-Planck, el cual permite simular una relación cuenca-lluvia-evaporación-suelo-escorrentía. En el trabajo se aplica la FPK en una relación lluvia-escorrentía y su solución se brinda mediante un método numérico.



**Figura 1: Caudales Medios anuales en el Rio Fonce**

## MÉTODOS

Se aplica el modelo bajo condiciones no estacionarias de la ecuación Fokker-Planck-Kolmogorov, con sus respectivas condiciones iniciales, valores de frontera, modelación y resultados.

El modelo FPK se deriva u obtiene a partir de un modelo determinista, al cual se le introducen señales aleatorias tipo ruido blanco (ver descripción detallada en (Domínguez & Rivera, 2010)). El modelo determinista relaciona los procesos de precipitación, evaporación, evapotranspiración, filtración y escorrentía, y al incluirle incertidumbre mediante los ruidos blancos, se convierte en una ecuación diferencial aleatoria (EDA), sobre la cual finalmente se deriva la FPK en la forma siguiente:

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q} [A(Q, t)p(Q, t)] + 0.5 \frac{\partial^2}{\partial Q^2} [B(Q, t)p(Q, t)]$$

(1)

El resultado de modelar procesos con la FPK es un histograma de frecuencias de caudales (monomodal, bimodal, trimodal, según el caso de la ecuación determinista). En esta ecuación  $p(Q, t)$  es la función de densidad de probabilidad (fdp) asociada a los caudales medios anuales ( $Q$ ) que puede cambiar en el tiempo ( $t$ );  $A(Q, t)$  es el coeficiente de traslación que determina cómo se desplazan las frecuencias a lo largo del eje de las abscisa  $Q$ ;  $B(Q, t)$  es el coeficiente de difusión o volatilidad que determina cómo aumentan o disminuyen las frecuencias en cada evento o



intervalo del histograma. En la estructura interna de ambos coeficientes se encuentra la vida misma del proceso en estudio, el cual en nuestro caso corresponde a los caudales medios del río Fonce, desde su nacimiento hasta el municipio de San Gil. Para el trabajo de investigación presente se asume que por tratarse de un río de montaña, los coeficientes de la FPK deben al menos considerar la formación de los caudales del río a partir de las lluvias, teniendo en cuenta la incertidumbre presente no sólo en los datos medidos sino además aquella que surge por no tener en cuenta otros procesos que inciden en la formación de los caudales.

Según lo anterior, los coeficientes se definen así (Kovalenko, 1993):

$$A(Q, t) = -(\bar{C} - 0.5G_{\bar{c}})Q - 0.5G_{\bar{C}\bar{N}} + \bar{N}$$

$$B(Q, t) = G_{\bar{c}}Q^2 - 2G_{\bar{C}\bar{N}}Q + G_{\bar{N}}$$

(2)

Las condiciones de escorrentía influenciada por las propiedades de vegetación y suelos en la cuenca (hasta San Gil) se expresan en  $\bar{C}$ , las lluvias en la cuenca se expresan mediante  $\bar{N}$  y los niveles de incertidumbre mediante las intensidades de los ruidos blancos  $G_{\bar{c}}, G_{\bar{C}\bar{N}}, G_{\bar{c}}, G_{\bar{N}}$ .

En desarrollo de la modelación se suele recurrir a la parametrización, la cual en este caso se realiza a partir de los coeficientes de Pearson  $a, b_0, b_1$  y  $b_2$ . Los detalles del Sistema de Pearson se hallan descritos en (Dominguez & Rivera, 2010):. Para este caso se asume que el histograma empírico de frecuencias se describe en forma adecuada mediante el Tipo III de Pearson y por lo tanto el parámetro  $b_2$  es nulo.

Las expresiones de los parámetros  $a, b_0, b_1$  y  $b_2$  vienen relacionadas en este caso particular con los estadísticos de los parámetros  $\bar{C}$  y  $\bar{N}$  de la siguiente forma (Domínguez & Rivera, 2010):

$$a = \frac{G_{\bar{C}\bar{N}} + 2\bar{N}}{2\bar{C} + G_{\bar{c}}}; \quad b_0 = -\frac{G_{\bar{N}}}{G_{\bar{c}} + 2\bar{C}}$$

$$b_1 = \frac{G_{\bar{C}\bar{N}}}{G_{\bar{c}} + 2\bar{C}}; \quad b_2 = 0$$

(3)

La solución de la ecuación teniendo en cuenta que  $Q$  está entre un rango  $[a, b]$ , se puede formar una malla  $Q \times t$  con nodos definidos  $Q_j = a + j\Delta Q$  y  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , donde  $j=0, 1, \dots, n$  ( $n=(b-a/\Delta Q)$ ) e  $i=0, 1, \dots$  el número de saltos en  $t$  será descrita por una condición de estabilidad presentada más adelante. La solución numérica de la ecuación FPK se representa de la siguiente manera:



CIAU

$$\frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{\Delta t} = - \left\{ \sigma \left[ \frac{(\phi L(A_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^{i+1} - A_j^{i+1} p_j^{i+1}))}{\Delta Q} + \frac{(\phi R(A_j^{i+1} p_j^{i+1} - A_{j-1}^{i+1} p_{j-1}^{i+1}))}{\Delta Q} \right] + (1 - \sigma) \left[ \frac{(\phi L(A_{j+1}^i p_{j+1}^i - A_j^i))}{\Delta Q} + \frac{(\phi R(A_j^i p_j^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i))}{\Delta Q} \right] \right\} + \left\{ \sigma \left[ \frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^{i+1} - 2B_j^{i+1} p_j^{i+1} + B_{j-1}^{i+1} p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q^2} \right] + (1 - \sigma) \left[ \frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + B_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q^2} \right] \right\}$$

(4)

donde  $\sigma$  es el coeficiente de ponderación del tiempo por capas, su valor puede oscilar de 0 a 1.  $\phi$  y  $\phi L$  son coeficientes direccionales.

La solución de la ecuación 7 se puede realizar de dos maneras: Implícita y explícita. La primera se realiza cuando el coeficiente de ponderación vale 0 y significa tener que realizar un procedimiento más largo en el método numérico aplicado, en nuestro caso decidimos realizar la solución explícita donde  $\sigma$  es igual a 1 y se reduce significativamente, resultando así:

$$\frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{\Delta t} = - \left\{ \sigma \left[ \frac{(\phi L(A_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^{i+1} - A_j^{i+1} p_j^{i+1}))}{\Delta Q} \right] \right\} + \left\{ \sigma \left[ \frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^{i+1} p_{j+1}^{i+1} - 2B_j^{i+1} p_j^{i+1} + B_{j-1}^{i+1} p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q^2} \right] \right\}$$

(5)

para realizar su solución numérica se requiere una condición de estabilidad (Dominguez & Rivera, 2010), que a su vez determina el número de saltos en i:

$$\max(|B(t, Q)|) \frac{\Delta t}{\Delta Q^2} < \frac{1}{2}$$

(6)

Las condiciones de frontera, se establecen con:

$$\left( A(t, Q)p(t, Q) - \frac{\partial^2 [B(t, Q)p(t, Q)]}{2\partial Q^2} \right) = 0$$

(7)

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos fueron aportados en forma gratuita por el Instituto IDEAM y comprendieron: una serie de valores de caudales medios anuales desde 1956 hasta 2012 del río Fonce en San Gil y una serie de valores totales anuales de precipitación en Charalá. La serie de precipitaciones y de caudales se fraccionó en dos momentos temporales: a) el primero de 1956 a 1984, con la cual se realizó la parametrización de la ecuación FPK; b) el segundo de 1985 a 2012 con el cual se validó el histograma modelado.



Los coeficientes de Pearson para el Tipo III se estimaron con la metodología de Mitropolskii y sus valores se muestran en las siguientes tablas (Dominguez & Rivera, 2010):

**Tabla 1: Coeficientes de Pearson**

$\mu_2$	4.512768332
$\mu_3$	-12.24920715
$\mu_4$	168.1989645

**Tabla 2: Coeficientes de Pearson y parametros para el calculo de los valores A y B**

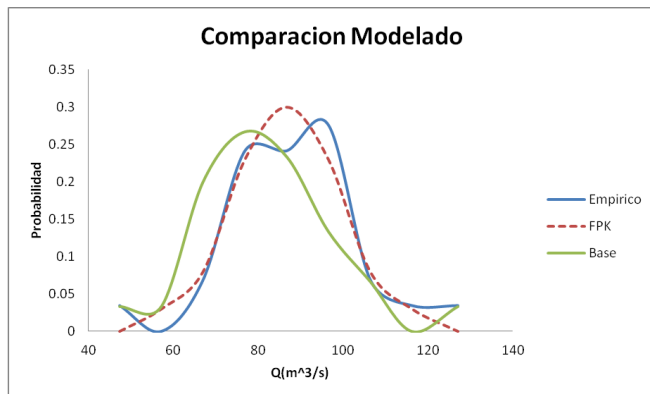
Coeficientes de Pearson		$\bar{C}$	-263.0415696
b0	12.24920715	$G_{\bar{C}\bar{N}}$	-1805.966667
b1	6.86570822	$G_{\bar{N}}$	6444.101352
a	-6.86570822	$G_{\bar{C}}$	263.0415696
$\bar{N}$	2708.95		

Aplicando la ecuación 2 a nueve intervalos (o eventos) de caudal, obtuvimos los siguientes resultados para los parámetros A y B:

**Tabla 3: Valores de A y B**

Q (m <sup>3</sup> /s)	A	B
42.33	21526.57215	690947.746
52.17	25690.99563	988847.85
62.03	29863.88339	1342157.37
71.89	34036.77114	1750326.45
81.75	38209.6589	2213355.09
91.61	42382.54665	2731243.3
101.47	46555.43441	3303991.08
111.33	50728.32217	3931598.42
121.19	54901.20992	4614065.32
132.05	59497.31145	5429235.42

A partir de los coeficientes de Pearson, ya se puede obtener una solución numérica para la ecuación FPK. En la web hay un claro ejemplo de cómo realizar el código de programación en el lenguaje Python; se reconoce que ofrece una gran ayuda a la hora de llegar a la solución y el archivo se llama Performance Python: Solving The 2D Diffusion Equation with Numpy. Durante la realización del código no se tuvieron grandes problemas más allá de la gran cantidad de iteraciones que tenía que realizar el computador, pues estos dependían del valor máximo de B, y fue bastante elevado. Se obtuvo una matriz muy grande, la cual fue el trabajo más dispendioso dentro de la investigación.



**Figura 2: Comparación del modelo con el resultado empírico, Base (1956-1984), Empírico y Modelado (1985-2012)**

#### 4 CONCLUSIONES

La modelación realizada con la ecuación FPK describe en forma adecuada al comportamiento empírico de los años 1984 y 2012.

La solución es aplicable en Hidrología, para caudales anuales, pero también se podría proponer para intervalos de tiempo menores como caudales diarios y seguir avanzando en el estudio y desarrollo de mejores técnicas de pronóstico basado en procesos bajo condiciones no estacionarias que nos lleven a obtener alarmas, o avisos de sequía, inundación o cualquier tipo de caudal que sea importante para la sociedad en general.



**CIAU**

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Kovalenko, V. (1993) Modelling of Hydrological Processes. Guidrometeoizdat, St Petersburg.

Dominguez, E., Rivera, H., 2010. A Fokker-Planck-Kolmogorov equation approach for the Monthly affluence forecast of Betania hydropower reservoir. J. Hydroinformatics 12 Bogota, 486–501.

Palacios D., Víctor A. (2014). Análisis de la deposición atmosférica en el Valle de Sugamuxi. Revista Ambiental Agua, Aire y Suelo. ISSN 1900-9178, 5 (1).

Thomas, R (2011). Stochastic modeling of hydrometeorological extremes and their possible relation with global change. Bogotá.

Hassidoff, 2008, Verificación de la hipótesis de intensidades de ruido invariantes en la formulación de escenarios hidrológicos utilizando la solución pseudoestacionaria de la ecuación Fokker-Planck Kolgomorov, Bogotá.

Quijano V., Mónica J., Quijano P., Alfonso, Melendez G., Ivan. (2014). Genotoxicidad en el aire de aire de Cúcuta - Colombia en muestras del PM2.5. Revista Ambiental Agua, Aire y Suelo. ISSN 1900-9178, 5 (1).