REVISTA AMBIENTAL AGUA AIRE Y SUELO

CONSTRUCCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA PARA SIMULAR EL MOVIMIENTO DE CAUDALES MEDIOS EN EL RIO FONCE (SANTANDER) EN EL MARCO DE LA AXIOMATICA DE ANDREY KOLMOGOROV

Recibido: 19 enero de 2019

Aprobado: 4 Junio de 2016

Rodrigo Galarza Ramírez

Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Militar Nueva Granada, Grupo Visión Colombia Hídrica,

Proyecto de Investigación ING 1770 de 2015

Bogotá, Colombia

u1101342@unimilitar.edu.co

Resumen

El objetivo del trabajo es construir variables aleatorias en caudales medios mensuales del río Fonce aplicando la axiomática de Andrey Kolmogorov. La construcción se lleva a cabo a partir de los conceptos de espacio muestral, evento, espacio medible, sigma álgebra, función medible y variable aleatoria. La definición formal de una variable aleatoria se da en los siguientes términos. Sea (Ω,F) un espacio medible cualitativo y $(\bar{\Omega},\bar{F})$ un espacio medible cuantitativo en donde Ω es un espacio muestral y F es una sigma álgebra, entonces una $(F\text{-}\bar{F})$ variable aleatoria es una función X que asigna valores (en número reales) de Ω en $\bar{\Omega}$. Para el trabajo se compilaron los datos de caudales medios del río Fonce en la estación hidrológica en San Gil, aportados por el Instituto IDEAM; posteriormente se construyeron los espacios medibles y la función medible X, cumpliendo con la propiedad de preimagen. El trabajo se desarrolló en el marco del proyecto de investigación UMNG ING 1770 de 2015, con recursos financieros de la Vicerrectoría de Investigaciones y en conjunto con la Universidad de Pamplona.

Palabras Clave: Variable aleatoria, proceso estocástico, Rio Fonce

Abstract

The aim of this work is to construct random functions on monthly average flow applying the Kolmogorov´s axiomatic. We do this by the concepts of random space, event, measurable space, sigma algebra, measurable function and random function. The formal definition of a random function is as follows. Be (Ω,F) a measurable qualitative space and $(\bar{\Omega},\bar{F})$ a measurable quantitative space, where Ω is a random space and F is a sigma algebra, then a $(F\text{-}\bar{F})$ random function is a function that assigns values (in real numbers) from Ω to$\bar{\Omega}$. Was compiled the data of monthly average flow from the Fonce river in the hydrological station in San Gil. The data was provided by IDEAM Institute. Finally, were constructed the measurable space and the measurable function X, applying the properties of the inverse image. This work was developed in the framework research UMNG ING 1770 in 2015, with economical resources of the vice-rector of search and together with Pamplona's University.

Keywords: Ramdon function, stochastic process, Fonce River

INTRODUCCIÓN

La teoría moderna de procesos estocásticos centra su atención en los conceptos de sigma álgebra, espacio medible, filtraciones, martingalas, variable aleatoria y espacio de probabilidad.

Este trabajo trata sobre la construcción de variables aleatorias en caudales medios del río Fonce aplicando la axiomática de Andrey Kolmogorov; para lo cual se definen los conceptos de espacio muestral, evento, sigma álgebra y variable aleatoria. La importancia del trabajo radica en que existe muy poca bibliografía que explique en forma clara y sencilla la construcción de los conceptos antes señalados. Los datos de los valores medios de caudales fueron aportados en forma gratuita por el Instituto IDEAM y con soporte en éstos se construye un juego de variables aleatorias discretas.

MÉTODOS

Se aplica la axiomática de Kolmogorov para construir los conceptos de espacio muestral cualitativo y cuantitativo, eventos cualitativos y cuantitativos, sigmas álgebras cualitativas y cuantitativas, espacios medibles y variable aleatoria.

Un experimento aleatorio es un proceso de carácter repetitivo hecho a partir de reglas bien definidas, con el fin de verificar o de comprobar una teoría o hipótesis, cuyos resultados están sujetos o influidos por el azar (Bonnet, 2012). Para el caso del río Fonce se asume que el experimento consiste en los giros de traslación y rotación de la esfera Tierra, con las respectivas incidencias en el comportamiento del río Fonce.

Dentro del experimento aleatorio se define al espacio muestral como un conjunto de los posibles resultados. Para el caso nuestro, los sucesos de los caudales medios se redujeron a tres aspectos relevantes: caudales favorables al canotaje, al abastecimiento de agua y a los procesos de socavación; por lo tanto, el espacio muestral cualitativo y discreto es el siguiente:

Socavación de orillas: So

Canotaje: Ca

Abastecimiento: Ab

Definimos (Ω) de la siguiente manera:

Ω=[So,Ca,Ab]

Los elementos muestrales discretos y cualitativos son los elementos que componen al espacio muestral.

A partir de los elementos muestrales se definen los eventos, los cuales son un subconjunto de un espacio muestral: para cualquier experimento dado podemos estar interesados en la ocurrencia de ciertos eventos más que en el resultado de un elemento especifico en el espacio muestral (Matus, 2014). En nuestro caso tenemos a los siguientes eventos:

$A_1=[So]$

$A_2=[Ca]$

$A_3=[Ab]$

Los complementos de los eventos con respecto al espacio muestral son:

$A_1^c=\Omega-A_1=[So,Ca,Ab]-[So]=[Ca,Ab]$

$A_2^c=\Omega-A_2=[So,Ca,Ab]-[Ca]=[So,Ab]$

$A_3^c=\Omega-A_3=[So,Ca,Ab]-[Ab]=[So,Ca]$

La unión de los eventos se define así:

$A_1\cup A_2=[So,Ca] =A_1\cup A_2$

$A_1\cup A_3=[So,Ab] =A_3\cup A_1$

$A_2\cup A_3=[Ca,Ab] =A_3\cup A_2$

La intersección de los eventos:

$A_1\cap A_2=[So]\cap[Ca]=\emptyset$

$A_1\cap A_3=[So]\cap[Ab]=\emptyset$

$A_2\cap A_3=[Ca]\cap[Ab]=\emptyset$

A partir del espacio muestral se construye el concepto de sigma álgebra cualitativa, cumpliendo: Sea ∅ el conjunto vacío y Ω nuestro espacio muestral anterior, entonces, un conjunto F de subconjuntos de un conjunto Ω se llama ⍰-algebra. Las propiedades de una σ-álgebra son: (Blanco L, 2003).

El conjunto vacío está en F:$\emptyset\in F$

Si A es un evento está en F, también está su complemento.

Si $A_1,A_2,A_3…$es una sucesión de eventos de F, entonces la unión (contable) de todos ellos también está en F.

En nuestro caso la sigma álgebra total es:

$F"=" \{\emptyset,\Omega,[A_1],[A_2],[A_3],[A_1^c],[A_2^c],[A_3^c],A_1\cup A_2,A_1\cup A_3,A_2\cup A_3,A_1\cap A_2,A_1\cap A_3,A_2\cap A_3 \}$

$F"=" \{\emptyset,\Omega,[So],[Ca],[Ab],[Ca,Ab],[So,Ab],[So,Ca],\}$

A partir del espacio muestral y la sigma álgebra se constituye el concepto de espacio medible cualitativo (F"," Ω).

A continuación se formula un espacio medible cuantitativo $\bar{\Omega}$ a partir de un espacio muestral cualitativo, eventos cuantitativos y una sigma álgebra espejo (cuantitativa) $\bar{F}$.

$\bar{\Omega}=[8.6 ,848]$

Evento canotaje (E_1): Del caudal correspondiente al caudal ecológico al caudal que corresponde al caudal medio del río:

$E_1=[8.6,81.2)$

Evento Abastecimiento (E_2): Del caudal correspondiente al canotaje al caudal que corresponde al intervalo de abastecimiento o caudal medio del río:
$E_2=[81.2\ ,90)$

Evento caudal de socavación (E_3): Del caudal medio del Río al caudal de socavación del puente:

$E_3=[90,848)$

Los complementos de los eventos son:
$E_1^c=\Omega-E_1=[0,848]-[8.6\ ,81,2)=[81,2,848]$
$E_2^c=\Omega-E_2=[0,848]-[81,2,90)=\{[8.6\ ,81,2),[90,848]\}$
$E_3^c=\Omega-E_3=[0,848]-[90,848]=[0,90)$

La unión de los eventos es:
$E_1\cup E_2=[8.6\ ,90]= E_2\cup E_1$
$E_1\cup E_3=[8.6\ ,81,2],[90,848]= E_3\cup E_1$
$E_2\cup E_3=[81,2,848]= E_3\cup E_2$

La intersección de los eventos es:
$E_1\cap E_2=[8.6\ ,81,2]\cap[81,2,90]=\emptyset$
$E_1\cap E_3=[8.6\ ,81,2]\cap[90,848)=\emptyset$
$E_2\cap E_3=[81,2,90)\cap[90,848]=\emptyset$

Basados en los datos anteriores nuestra σ – álgebra espejo es:

$\overline{F}=\{\emptyset,\Omega,[E_1],[E_2],[E_3],[E_1^c],[E_2^c],[E_3^c],E_1\cup E_2,E_1\cup E_3,E_2\cup E_3,E_1\cap E_2,E_1\cap E_3,E_2\cap E_3\}$

$\overline{F}=\{(\emptyset,[8.6\ ,848],[8.6\ ,81,2),[81,2,90),[90,848],@[8.6,848],\{[8.6\ ,81,2)[90,848]\},[8.6\ ,81.2)\ )\}$

La variable aleatoria se construye de la siguiente manera.

Sea (Ω,F) un espacio medible cualitativo y $(\overline{\Omega},\overline{F})$ un espacio medible cuantitativo en donde Ω es un espacio muestral y F es una sigma álgebra, entonces una $(F\text{-}\overline{F})$ variable aleatoria es una función X que asigna valores (en número reales) de Ω en $\overline{\Omega}$.
Sea $X: \Omega\rightarrow\overline{\Omega}$
Entonces:

X:

La axiomática de Kolmogorov exige: es variable aleatoria cuando la imagen inversa de los eventos cuantitativos pertenece a la sigma álgebra cualitativa.

A continuación comprobamos esta propiedad respecto al ejemplo anterior:
$X^{(-1)}(\emptyset)=\emptyset\in F$
$X^{(-1)}(\{8,6,81,2\})=\{w\in\Omega:X(w)\in\{8,6,81,2\}\}=[Ca]\in F$
$X^{(-1)}(81,6,90)=[Ab]\in F$
$X^{(-1)}(90,848)=[So]\in F$
Se puede apreciar en la demostración anterior, que la imagen inversa de los eventos cuantitativos pertenece a la sigma álgebra cualitativa y por lo tanto X es una variable aleatoria en los términos de la axiomática de Kolmogorov. A continuación se construyen 12 variables aleatorias según los valores medios de caudales multianuales de cada mes del año calendario para el caso del río Fonce.

Como se pudo apreciar, igualmente se presenta para cada espacio muestral cuantitativo su correspondiente medida de probabilidad P [0,1], conocida como frecuencia empírica según los datos de las series temporales. A la tripla conformada por el espacio muestral cuantitativo, la sigma álgebra cuantitativa y su medida de probabilidad se le conoce como espacio de probabilidad.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos fueron aportados en forma gratuita por el Instituto IDEAM y comprendieron: una serie de valores de caudales medios mensuales multianuales desde 1955 hasta 2012 del río Fonce en San Gil. Para cada mes se construyó una variable aleatoria.

Como se logró apreciar, la construcción de una variable aleatoria sólo implica conocer un espacio medible y no tiene referencia alguna a la probabilidad.

Ante los resultados obtenidos surge el interrogante ¿Es posible inundar los estudios de ingeniería con variables aleatorias en el sentido formal de la teoría moderna de probabilidad?

4 CONCLUSIONES

El trabajo demuestra que en valores de caudales medios del río Fonce se logró construir variables aleatorias en la axiomática de Kolmogorov.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Cely R., Omar A. (2013). Utilización de modelos hidrológicos para la determinación de cuencas en ecosistemas de páramo. Revista Ambiental Agua, Aire y Suelo. ISSN 1900-9178, 4 (2). pp: 56 - 65.

José Bonnet. (2012).Lecciones de estadística: Estadística descriptiva y probabilidad. España. Ed club universitario.Liliana Blanco Castañeda. (2003). Probabilidad. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.