



PID CONTROLLER FOR SYSTEM MASS-SPRING-DAMPER USING ZIEGLER AND NICHOLS

CONTROLADOR PID PARA SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR USANDO ZIEGLER Y NICHOLS

Jorge Araque, Carlos Riaño, Helmer Mejía

Universidad de Pamplona
Departamento de Mecánica, Mecatrónica e Industrial
Ciudadela Universitaria, 543050, Pamplona, Colombia

Abstract

This paper presents a mechanic system mass-spring-damper where there are series and parallel configurations of springs and dampers that are connected to a mass, when performing the analysis of this system an equivalent elasticity coefficient and equivalent damping coefficient is calculated, taking into account each configuration has a characteristic equation which allows this calculation. There's getting the differential equation model the system where you can observe the behavior of it, before is taking the differential equation to equations of state representation to simplify the system model and the Laplace transform is performed to find the model transfer function. Having all this process performing it's looking for tuning a PID controller using two Ziegler – Nichols's graphic methods.

Resumen

En este artículo se presenta un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador en donde se tienen configuraciones en serie y paralelo de resortes y amortiguadores que van conectados a una masa, al realizar el análisis de este sistema se calcula un coeficiente de elasticidad equivalente y un coeficiente de amortiguamiento equivalente, teniendo en cuenta que cada configuración tiene una ecuación característica que permite este cálculo. De allí se obtiene la ecuación diferencial que modela el sistema en donde se puede observar el comportamiento del mismo, después se lleva la ecuación diferencia a representación en ecuaciones de estado para simplificar el modelo del sistema y se realiza la transformada de Laplace de las mismas para hallar la función de transferencia del modelo. Teniendo todo este proceso realizado se busca sintonizar un controlador PID utilizando los dos métodos gráficos de Ziegler – Nichols.

Key words: Mass-spring-damper, equivalent elasticity, equivalent damping, Laplace transform, PID controller, Ziegler – Nichols.

Palabras clave: Masa-resorte-amortiguador, elasticidad equivalente, amortiguamiento equivalente, transformada de Laplace, controlador PID, Ziegler – Nichols.

I. Introducción



Los sistemas masa-resorte-amortiguador son comúnmente encontrados en diseños como vehículos, robots, entre otras aplicaciones que se usan tanto en lo académico como en la industria, por este motivo se hace importante analizar, modelar, representar y controlar para dar solución a los problemas que se presentan en el uso de estos sistemas. (Ortiz et al., 2014)(Li & Yin, 2017) Aunque la configuración del sistema puede ser diferente al esquema general es posible en ciertos casos generar unas equivalencias de sus partes para así llevarlo a la forma conocida teniendo en cuenta que existen representaciones matemáticas que permiten solucionar estos inconvenientes, todo esto con el fin de modelar el sistema con ecuaciones diferenciales y hallar una función de transferencia que tenga un comportamiento aproximado a la planta.

Para hallar la función de transferencia del sistema a partir de una ecuación diferencial, la forma más usada y que da una representación muy cercana al sistema original es pasar a representación en espacios de estado, (Justo, Flores, Luis, Avalos, & Osvaldo, 2010) en donde se hace fácil aplicar la transformada de Laplace que demuestra como la función de transferencia tiene una similitud con la ecuación diferencial al tomar los valores de orden de la s al igual que el orden de la derivada de una ecuación diferencial.

Al tener la función de transferencia se puede observar qué método gráfico de Ziegler – Nichols se puede llegar a utilizar teniendo en cuenta que la función de transferencia no va a tener integradores ni polos dominantes. De aquí se determina que es posible que la sintonización del controlador PID para este sistema pueda hacerse por el primer método gráfico, para asegurar esto se debe colocar en lazo abierto una entrada de escalón unitario y la respuesta debe tener forma de S . (Ogata, Pinto Bermúdez, Matía, Pearson, & Hall, 2010)

Teniendo este tipo de resultados se puede decir que la sintonización del controlador se puede hacer con el primer método gráfico de Ziegler – Nichols y de esa forma aplicar la tabla propuesta para hallar cada una de las ganancias del proporcional, integrativo y derivativo que hacen parte de la ecuación que describe como función de transferencia el controlador PID. (Åström & Hägglund, 2002; Karimi, Pawlus, & Robbersmyr, 2011; Li & Yin, 2017; Mclauchlan, 2003; Meshram & Kanojiya, 2012; Ortiz et al., 2014)

II. Materiales y Métodos

2.1 Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador

Se presenta el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador (Figura 1.), el cual presenta una configuración de resortes y amortiguadores en serie y paralelo que se conectan a la masa sin fricción y a la cual se le aplica una fuerza. Lo primero que se debe hacer es sacar la equivalencia de los coeficientes de elasticidad y amortiguamiento para dejar el sistema de tal forma que se pueda representar por medio de ecuaciones diferenciales, estas equivalencias se hallan gracias a unas ecuaciones que describen el comportamiento de las los resortes y amortiguadores en estas configuraciones.

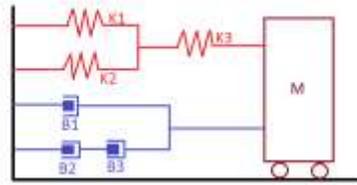


Figura 1. Sistema Mecánico Masa-Resorte-Amortiguador.
Fuente: Elaboración propia

Las ecuaciones de equivalencia de las configuraciones en serie y paralelo de los resortes y amortiguadores son las siguientes:

2.2 Ecuaciones de equivalencia del coeficiente de elasticidad.

Demostración de equivalencia en paralelo.

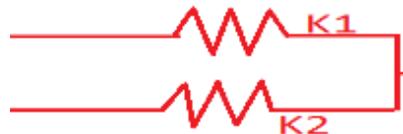


Figura 2. Sistema de resortes en paralelo.
Fuente: Elaboración propia

$$(K1 * x) + (K2 * x) = F \quad (1)$$

$$F = K_{eq} * x \quad (2)$$

Reemplazando en (2)

$$K_{eq} = K1 + K2 \quad (3)$$

Demostración de equivalencia en serie.

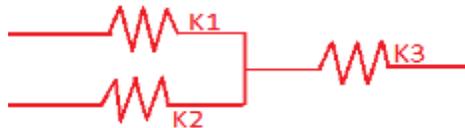


Figura 3. Sistema de resortes en serie.
Fuente: Elaboración propia

$$K_{eq12} * y = F \quad (4)$$

$$K_3(x - y) = F \quad (5)$$

$$K_{eq} = \frac{F}{x} \quad (6)$$



$$K_3 \left(x - \frac{F}{K_{eq12}} \right) = F \quad (7)$$

$$K_2 x = F \left(1 + \frac{K_3}{K_{eq12}} \right) \quad (8)$$

Reemplazando en (6)

$$K_{eq} = \left(\frac{K_3 K_{eq12}}{K_{eq12} + K_3} \right) \quad (9)$$

2.3 Ecuaciones de equivalencia del coeficiente de amortiguación.

Demostración de equivalencia en serie.



Figura 4. Sistema de amortiguadores en serie.
Fuente: Elaboración propia

$$F = b_2(\dot{z} - \dot{x}) = b_3(\dot{y} - \dot{z}) \quad (10)$$

$$\dot{z} = \frac{b_2 \dot{y} + b_3 \dot{x}}{b_3 + b_2} \quad (11)$$

Reemplazando en (13)

$$F = b_3 * \left(\dot{y} - \frac{b_2 \dot{y} + b_3 \dot{x}}{b_3 + b_2} \right) \quad (12)$$

$$b_{eq} = \left(\frac{b_3 * b_2}{b_3 + b_2} \right) \quad (13)$$

Demostración de equivalencia en paralelo.

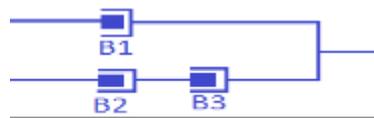


Figura 5. Sistema de amortiguadores en paralelo.
Fuente: Elaboración propia

$$F = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_{eq23}(\dot{y} - \dot{x}) \quad (14)$$

$$F = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) \quad (15)$$



Reemplazando en (11)

$$b_{eq} = b_1 + b_{eq23} \tag{16}$$

Después del análisis de las ecuaciones para hallar las equivalencias de los coeficientes de elasticidad y amortiguamiento del sistema mecánico y de esta forma se puede representar como un resorte con el coeficiente de elasticidad equivalente K_{eq} y un amortiguador con el coeficiente de amortiguamiento equivalente b_{eq} .

Si los valores de los coeficientes de los resortes son $K_1 = 14$, $K_2 = 14$ y $K_3 = 34$ y los valores de los coeficientes de los amortiguadores $b_1 = 10$, $b_2 = 25$ y $b_3 = 15$.

De esta forma la $K_{eq} = 15.35$ y $b_{eq} = 19.375$.

2.4 Ecuación Diferencial del Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Teniendo las equivalencias dadas se puede modelar el sistema mecánico masa-resorte-amortiguador en su ecuación diferencial de la siguiente manera.

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = u \tag{17}$$

Esta ecuación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{u}{m} \tag{18}$$

Con esta expresión podemos generar un diagrama de bloques que representa este sistema como su ecuación diferencial.

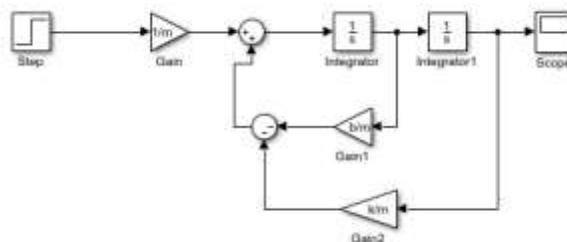


Figura 6. Ecuación diferencial en diagrama de bloques.
Fuente: Elaboración propia

2.5 Representación en Espacios de Estados del Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

Las ecuaciones diferenciales tienen diferentes formas de ser resueltas una de ellas es por la representación en espacios de estado, la cual facilita los cálculos a realizar para llegar a la función de transferencia del sistema.

Tabla 1: Representación en Espacio de Estados.



$a_1 = \frac{b}{m}$	$x_1 = y$	$\dot{x}_1 = x_2$
$a_2 = \frac{k}{m}$	$x_2 = \dot{y}$	$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + u$

Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones que representan el sistema en espacios de estado son las siguientes:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{19}$$

$$y = Cx \tag{20}$$

De esta forma el sistema queda representado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{21}$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

2.6 Función de Transferencia a partir de las Ecuaciones de Estado

Para hallar la función de transferencia del sistema partimos de las ecuaciones de estado en donde se tiene que buscar la salida sobre la entrada que es lo que representa a la función de transferencia y así hallar la transformada de Laplace que de la función en S del sistema masa-resorte-amortiguador la cual debe presentar un comportamiento muy parecido a la planta en de la ecuación diferencial.

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \tag{23}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \left\{ \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \left\{ \frac{1}{s^2 + s\frac{b}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + sb + k} \tag{26}$$



Teniendo la función de transferencia se puede colocarle una entrada de escalón unitario con la cual se podrá observar el comportamiento del sistema y determinar qué tipo de controlador se puede usar en este caso para que el sistema se estabilice en el set point deseado.

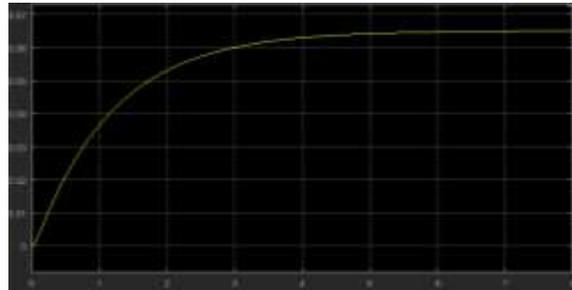


Figura 7. Comportamiento del sistema ante un escalón unitario.
Fuente: Elaboración propia

2.7 Primer método de Ziegler - Nichols

Al observar el comportamiento de la función de transferencia del sistema masa-resorte-amortiguador se puede analizar que es posible sintonizar un controlador PID para este sistema, esto por el primer método de Ziegler – Nichols. Este método es gráfico y experimental ya que no ofrece componentes analíticas y se basa en hallar un punto de inflexión de la gráfica que tiene un comportamiento de una S. Teniendo este punto de inflexión se traza una línea tangente a la gráfica para obtener donde corta en el eje de tiempo y así determinar qué valores de L y T se deben tener en cuenta para hallar las ganancias K_p del proporcional, T_i del integral y el T_d del derivativo, usando la tabla descrita para este método. (Åström & Hägglund, 2002; Ogata et al., 2010)

Tabla 2: Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método).

Tipo de Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Fuente: (Ogata et al., 2010)

Después de obtener la gráfica del comportamiento del sistema se hace el análisis del primer método de Ziegler – Nichols y se hallan los valores de T y L.

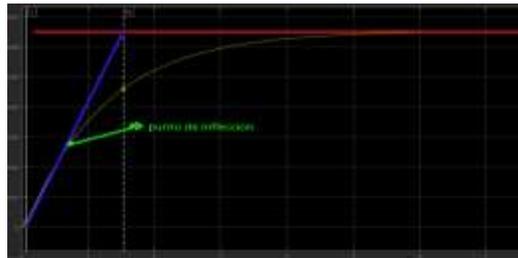


Figura 8. Análisis gráfico del sistema por el primer método de Ziegler - Nichols.
Fuente: Elaboración propia

De este análisis se encontraron los valores requeridos los cuales fueron $T = 1.460$ y $L = 0.073$. Con estos valores se halla la función de transferencia del controlador PID con la siguiente fórmula.

$$G(S) = \frac{0.6T\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s} \quad (27)$$

Con esta ecuación se reemplaza los valores de T y L , se expande la misma y se multiplica con la función de transferencia del sistema y a esta se le coloca la entrada de escalón unitario para observar la respuesta que da.

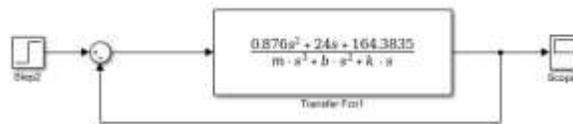


Figura 9. Función de Transferencia del sistema con el controlador PID.
Fuente: Elaboración propia

III. Resultados

Al someter la función de transferencia del sistema al controlador PID y probar con una entrada de escalón unitario se obtuvo la siguiente respuesta.

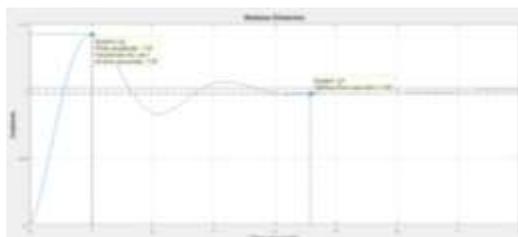


Figura 10. Respuesta del sistema con controlador PID ante un escalón unitario.
Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que ante los valores de T y L encontrados en el análisis gráfico del primer método de Ziegler – Nichols que se tiene una respuesta con un sobre impulso del 42% y un tiempo de estabilización de 4.59 segundos lo cual no es un mal resultado pero se puede mejorar este sobre impulso y disminuir el tiempo de estabilización teniendo en cuenta ciertas



consideraciones las cuales pueden ser, disminuir el valor de $\frac{1}{L}$ en la ecuación del controlador o aumentar el valor de $0.6T$, de esta forma se consiguen los siguientes resultados.

Tabla 3: Valores con cambio en $1/L$.

Valor($1/L$)	Sobre Impulso (%)	Tiempo de estabilización (seg)	Valor($1/L$)	Sobre Impulso (%)	Tiempo de estabilización (seg)
6	17.6	6.04	5.15	13.3	4.92
5	12.4	5.09	3	1.16	5.41
4	6.65	6.55	3.5	3.7	7.33
4.5	9.61	5.76	5.3	14.1	4.75
4.75	11	5.41	5.5	15.1	6.26
4.95	12.2	5.15			

Fuente: Elaboración propia.

Los tres mejores resultados se obtuvieron con los valores de $\frac{1}{L} = 4.95$, $\frac{1}{L} = 5.15$ y $\frac{1}{L} = 5.3$

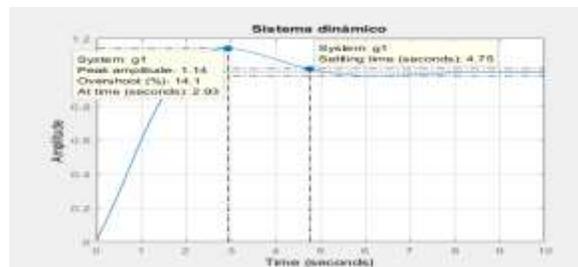


Figura 11. Respuesta del sistema cuando el valor de $1/L$ es 5.3.

Fuente: Elaboración propia

Esta respuesta es mucho mejor que la obtenida por lo valores iniciales del análisis gráfico, pero el tiempo de estabilización todavía es alto, manteniendo este valor de $\frac{1}{L}$ se cambiará el valor de $0.6T$ y ver la respuesta que da el sistema.

Tabla 4: Valores con cambio en $0.6T$.

Valor($0.6T$)	Sobre Impulso (%)	Tiempo de estabilización (seg)	Valor($0.6T$)	Sobre Impulso (%)	Tiempo de estabilización (seg)
0.3	3.9	8.49	30	9.35	0.99
3	17.6	3.6	40	4.33	0.8
4	16.9	3.03	50	3.54	0.714
8	13.4	1.56	80	2.27	0.507
13	10.3	1.28	85	2.14	0.469
20	7.68	1.08			

Fuente: Elaboración propia.

Los tres mejores resultados se obtuvieron con los valores de $0.6T = 50$, $0.6T = 80$ y $0.6T = 85$



Figura 12. Respuesta del sistema cuando el valor de $1/L$ es 5.3 y el de $0.6T$ es 85.
Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que la respuesta es mucho mejor y que de esta forma las consideraciones que se tomaron para diseñar el controlador son correctas y permiten mejorar la respuesta del sistema con respecto a la entrada de escalón unitario.

IV. Conclusiones y discusión

4.1 Conclusiones

El análisis gráfico que se le hace al sistema mecánico masa-resorte-amortiguador usando el primer método de Ziegler – Nichols da una aproximación bastante cercana de lo que puede llegar a ser los valores de los coeficientes de ganancia de K_p del proporcional, T_i del integral y el T_d del derivativo, pero este puede que no de la mejor respuesta del sistema por este motivo se toman consideraciones como cambiar los valores de $\frac{1}{L}$ donde se disminuye el valor de esta operación haciendo cambiar L por lo tanto cambiando las ganancias y $0.6T$ también se cambia en este caso aumentado su valor y en consecuencia también cambia T en donde solo afecta a la ganancia proporcional. Estas consideraciones se tomaron de acuerdo a los resultados que se observaron al hacer cambios de los valores donde al aumentar y disminuir estas operaciones se mostraban cambios en la respuesta, experimentalmente se halló que estas eran las mejores.

4.2 Discusión

Para la sintonización de este controlador PID se pudieron utilizar otros métodos analíticos que hubiesen dado unos valores más precisos como el análisis de respuesta en frecuencia, pero la idea era revisar el comportamiento del sistema y de allí observar que método de Ziegler – Nichols podría servir y de esta forma ver qué tan preciso podría llegar a ser, cabe decir que la aproximación de este método está sujeto al error humano ya que se pudo haber tomado mal el punto de inflexión de la gráfica y esto generó que los valores encontrados no fueran los óptimos, pudiendo usar herramientas matemáticas que dieran con mayor exactitud estas constantes.

Referencias

- Åström, K. J., & Hägglund, T. (2002). Revisiting the Ziegler-Nichols Tuning Rules for PI Control. *Asian Journal of Control*, 4(4), 364–380.
- Justo, E. E., Flores, J. L., Luis, J., Avalos, B., & Osvaldo, E. (2010). Control Proporcional-Integral-Generalizado de un Sistema Masa-Resorte- Amortiguador, (May 2015).



- Karimi, H. R., Pawlus, W., & Robbersmyr, K. G. (2011). Influence of unloading modes of spring-mass-damper models on vehicle to pole collision simulation results. *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, CCC 2011*, 5919–5923.
- Li, Z., & Yin, Z. (2017). Position tracking control of mass spring damper system with time-varying coefficients. *Proceedings of the 29th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2017*, 4994–4998. <https://doi.org/10.1109/CCDC.2017.7979380>
- Mclauchlan, R. (2003). Implementation of Direct Adaptive Control, 3299–3304.
- Meshram, P. M., & Kanojiya, R. G. (2012). Tuning of PID Controller using Ziegler-Nichols Method for Speed Control of DC Motor. *2013 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, 117–122.
- Ogata, K., Pinto Bermúdez, E., Matía, F., Pearson, E., & Hall, P. (2010). [Book] *Ingeniería de control moderna*. Retrieved from www.pearsoneducacion.com
- Ortiz, P. S. C., Dutan, B. R. N., Jaramillo, L. G. T., Avila-Campoverde, R. S., Aleman, M. A. C., Montesdeoca-Contreras, J. C., & Morales-Garcia, J. A. (2014). Linearization of mass spring damper system for applying linear control PID techniques. *2014 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing, ROPEC 2014*. <https://doi.org/10.1109/ROPEC.2014.7036300>